NOVEMBER/DECEMBER 2025

23UMA51 — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks



SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define Subgroup.

   உட்குலம் வரையறு.

2. Define Cyclic Group.

   சுழற்சி குலம் வரையறு.

3. Give an example of homomorphism.

   செயல் மாறாக் கோர்த்தலுக்கான உதாரணம் கூறு.

4. Define Automorphism.

   தன்னியக்கவியல் வரையறு.

5. Express the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ as a product of transposition.

இடமாற்றத்தின் பெருக்கலாக வரிசைமாற்றத்தை $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ வெளிப்படுத்தவும்.

6. Define even permutation.

இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றம் வரையறு.

7. Define ring with an example.

வளையத்தை ஒரு எடுத்துக்காட்டுடன் வரையறு.

8. Define quotient ring.

பகுவளையம் வரையறு.

9. Define field.

புலம் வரையறு.

10. Define Euclidean rings.

யூக்ளிடியன் வளையங்கள் வரையறு.

19. Prove that the set $Z_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$ is a commutative ring with respect to the binary operation addition modulo and multiplication modulo $+_4, \times_4$.

$Z_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$ என்ற கணமானது ஈருறுப்பு செயலியான கூட்டல் மட்டு மற்றும் பெருக்கல் மட்டு $+_4, \times_4$ ஆகியவற்றைப் பொறுத்து ஒரு பரிமாற்ற வளையம் என்பதை நிரூபி.

20. Prove that every finite integral domain is a field.

ஒவ்வொரு வரையறுக்கப்பட்ட ஒருங்கிணைந்த களமும் ஒரு புலம் என்பதை நிரூபி.



SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Every group of prime order is cyclic.

பகா வரிசையின் ஒவ்வொரு குலமும் சுழற்சியானது.

Or

(b) If every element in a group is its own inverse, then the group must be abelian.

ஒரு குலத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு தனிமமும் அதன் சொந்த தலைகீழ் என்றால், அந்தக் குலம் பரிமாற்றுக்குலமாக இருக்க வேண்டும் என நிரூபி.

12. (a) Let $f: G \to G'$ be a homomorphism then the $Ker(f)$ is a normal subgroup of G.

$f: G \to G'$ என்பது ஒரு செயல் மாறாக் கோர்த்தல். பின்னர் $Ker(f)$ என்பது G இன் சாதாரண உட்குலமா இருக்கட்டும் என நிரூபி.

Or

(b) Every subgroup of an abelian group is a normal subgroup.

ஒரு பரிமாற்றுக்குலத்தின் ஒவ்வொரு உட்குலமும் ஒரு சாதாரண உட்குலம் ஆகும் என நிரூபி.

13. (a) Find the Inverse permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

தலைகீழ் வரிசைமாற்றத்தைக் கண்டறியவும் $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Or

(b) Given $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ then compute $(4, 1, 3, 5)\cdot(5, 6, 3)$ and $(5, 6, 3)\cdot(4, 1, 3, 5)$.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ கொடுக்கப்பட்ட பிறகு $(4, 1, 3, 5)\cdot(5, 6, 3)$ மற்றும் $(5, 6, 3)\cdot(4, 1, 3, 5)$ ஐக் கணக்கிடு.

14. (a) Define ring and give an example of a ring with zero-divisors.

வளையத்தை வரையறுத்து, பூஜ்ஜிய-வகுப்பான்களைக் கொண்ட வளையத்தின் உதாரணத்தைக் கொடு.

Or

(b) A commutative ring $(R, +, .)$ is an integral domain iff the cancelation laws hold in 'R'.

ஒரு பரிமாற்ற வளையம் $(R, +, .)$ என்பது 'R' இல் உள்ள ரத்துச் சட்டங்கள் $\Leftrightarrow$ ஒரு ஒருங்கிணைந்த களமாகும் எனக் காட்டுக.

15. (a) Prove that every field is an integral domain.

ஒவ்வொரு புலமும் ஒரு ஒருங்கிணைந்த களம் என்பதை நிரூபி.

Or

(b) If 'R' be a commutative ring with unity of whose ideals are $\{0\}$ and R, then 'R' is a field.

அலகு உறுப்புடன் பரிமாற்றுப் பண்புடைய வளையம் 'R'ன் சீர்மங்கள் $\{0\}$ மற்றும் R, எனில் R என்பது களம் என்பதை நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. State and prove Lagrange's Theorem.

லாக்ரேஞ்சின் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

17. State and prove Fundamental Theorem on homomorphism of groups.

குலத்தின் செயல் மாறாக் கோர்த்தல் பற்றிய அடிப்படை தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

18. State and Prove Cayley's Theorem.

கெயிலியின் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.